SESSION 1988

Géométrie

(Option TA)

Durée : 3 h 30

Sauf pour les notations, les quatre parties du problème sont largement indépendantes.

Dans l'espace affine euclidien de dimension trois, on donne deux droites M et N non coplanaires, dont on désigne respectivement un vecteur unitaire par $\vec{m}$ et $\vec{n}$. On appelle M_0 (et N_0) les points de M (et N) tels que la droite (M_0N_0) soit la perpendiculaire commune à M et N.

Pour u réel donné, M_u (et N_u) sont les points de M (et N) définis par $\overrightarrow{M_0M_u} = u\,\vec{m}$ (et $\overrightarrow{N_0N_u} = u\,\vec{n}$). D_u désigne la droite (M_uN_u).

I 1° a) Montrer que D_u coupe M et N sous le même angle ; c'est à dire que les angles des droites D_u et M d'une part, D_u et N d'autre part, sont égaux.

b) Lorsque u décrit $\mathbb{R}$, montrer que D_u est parallèle à un plan fixe P que l'on déterminera.

Dans la suite on désigne par S la surface réglée, ensemble des droites D_u.

I_u étant le milieu du segment $[M_uN_u]$; pour t réel donné, on désigne par M(u,t) le point de D_u tel que $\overrightarrow{I_uM(u,t)} = t\,\overrightarrow{I_uM_u}$.

2° a) Lorsque u décrit $\mathbb{R}$, montrer que les points M(u,t) sont alignés. On appelle cette droite Δ_t. Quelles sont les droites Δ_0, Δ_1 ?

b) Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, montrer que la droite Δ_t est parallèle à un plan fixe Q. Montrer que les plans P et Q sont perpendiculaires. Que peut-on dire de l'ensemble des droites Δ_t ? Faire une figure.

II Dans un repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ orthonormé direct, les coordonnées étant notées x, y, z, les équations des droites M et N sont respectivement :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2\,(2 - z) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2} = -\frac{z+2}{5}$$

1° a) Calculer les coordonnées des points M_0, N_0 et I_0 définis en I.
Donner la distance entre les droites M et N.

b) Déterminer les composantes des vecteurs unitaires $\vec{m}$ (et $\vec{n}$) de M (et N), et la mesure θ de l'angle des droites M et N.

2° a) On désigne par M' (et N') les parallèles aux droite M (et N) menées par I_0 ; par $\vec{p}$ et $\vec{q}$ des vecteurs unitaires des bissectrices de l'angle des droites M' et N'. Déterminer la matrice de passage de la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ à la base orthonormée directe $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$.

b) (pouvant se traiter sans les réponses du 2° a)). Donner dans le repère $(I_0, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$, en notant les coordonnées X, Y, Z, des équations des droites M et N et des plans P et Q (définis en I) passant par I_0.

III On suppose que les droites M et N ont respectivement pour équations, dans un certain repère orthonormé $\begin{cases} Y = \alpha X \\ Z = a \end{cases}$ et $\begin{cases} Y = -\alpha X \\ Z = -a \end{cases}$ α et a réels positifs donnés. On garde les notations I et on oriente $\vec{m}$ et $\vec{n}$ de façon que les points M_1 et N_1 aient une ordonnée positive.

1° a) Donner les coordonées des points M_0, N_0, M_u, N_u ; enfin celles du point M (u,t).

b) Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(r,s) \longrightarrow rs,\ \alpha r,\ as$ est une représentation paramétrique de S.
Ecrire une équation cartésienne de S.

2° a) Déterminer les sections planes de S par les plans parallèles à l'un des plans de projections ; par les plans passant par l'un des axes du repère.

b) Reconnaître la surface S.

IV Les hypothèses sont celles de III

1° a) Faire une figure représentant le solide limité par : le plan Z = 0 et la surface S, les plans X = 0 et $X = a/\alpha$, les plans Y = Z et Y = 3a.
b) Calculer le volume de ce solide.

2° a) Ecrire une équation cartésienne du plan tangent à S en son point d'abscisse a/α et d'ordonnée $3a/2$.
Quelle est l'intersection de ce plan avec S ?

b) Soit L l'intersection de S et du cylindre d'équation $(X-R)^2 + Y^2 = R^2$.
Trouver une représentation paramétrique de L.

Le point A décrivant la courbe L, quelle est l'intersection de l'ensemble des droites (O A) et du plan d'équation Z = a ? Que peut-on en déduire au sujet de L ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail